PART3　分数式の計算

3　[1]　$\dfrac{1}{n(n-2)}+\dfrac{1}{(n-2)(n-4)}+\dfrac{1}{(n-4)(n-6)}$ を計算せよ。

[2]　次の計算をせよ。

(1)　$\dfrac{x^2+4x+6}{x+2}-\dfrac{x^2+5x+8}{x+3}$　　(2)　$\dfrac{x+1}{x+2}-\dfrac{x+2}{x+3}-\dfrac{x+3}{x+4}+\dfrac{x+4}{x+5}$

Point Pickup

[1]　ある分数式を，複数の分数式の和や差の形（または多項式と複数の分数式の和や差の形）で表すことを，「部分分数に分解する」という。

$$\frac{1}{(x+a)(x+b)}=\frac{1}{b-a}\cdot\frac{(x+b)-(x+a)}{(x+a)(x+b)}=\frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{x+a}-\frac{1}{x+b}\right)$$

[2]　(分子の次数) ≧ (分母の次数) である分数式 $\dfrac{A}{B}$ は，A を B で割った商 Q と余り R を用いて

$$\frac{A}{B}=Q+\frac{R}{B}$$

の形に変形するとよい。

第１講　PART3　確認問題

次の計算をせよ。

1　$\dfrac{1}{(x-2)(x+1)}+\dfrac{1}{(x+1)(x+4)}+\dfrac{1}{(x+4)(x+7)}$

$=\dfrac{\boxed{ア}}{(x-\boxed{イ})(x+\boxed{ウ})}$

2　$\dfrac{x^2+2x-12}{x-3}-\dfrac{x^2+9x+23}{x+4}$

$=\dfrac{\boxed{エオ}}{(x-\boxed{カ})(x+\boxed{キ})}$

3　$-\dfrac{x+3}{x+1}+\dfrac{x+4}{x+2}+\dfrac{x-4}{x-2}-\dfrac{x-5}{x-3}$

$=\dfrac{\boxed{ク}(2x-\boxed{ケ})}{(x+\boxed{コ})(x+\boxed{サ})(x-\boxed{シ})(x-\boxed{ス})}$

ただし，$\boxed{コ}<\boxed{サ}$，$\boxed{シ}<\boxed{ス}$ とする。

PART3　分数式の計算

3 [1] $\dfrac{1}{n(n-2)}+\dfrac{1}{(n-2)(n-4)}+\dfrac{1}{(n-4)(n-6)}$ を計算せよ。

[2] 次の計算をせよ。

(1) $\dfrac{x^2+4x+6}{x+2}-\dfrac{x^2+5x+8}{x+3}$　(2) $\dfrac{x+1}{x+2}-\dfrac{x+2}{x+3}-\dfrac{x+3}{x+4}+\dfrac{x+4}{x+5}$

[1] $\dfrac{1}{n(n-2)}+\dfrac{1}{(n-2)(n-4)}+\dfrac{1}{(n-4)(n-6)}$

$$=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n-2}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n-4}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-4}-\frac{1}{n-6}\right)$$

$$=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n-6}\right)=-\frac{1}{2}\cdot\frac{(n-6)-n}{n(n-6)}=\frac{3}{n(n-6)}$$

[2] (1) $\dfrac{x^2+4x+6}{x+2}-\dfrac{x^2+5x+8}{x+3}$

$$=x+2+\frac{2}{x+2}-\left(x+2+\frac{2}{x+3}\right)$$

$$=\frac{2}{x+2}-\frac{2}{x+3}=2\cdot\frac{(x+3)-(x+2)}{(x+2)(x+3)}$$

$$=\frac{2}{(x+2)(x+3)}$$

$x+2$) x^2+4x+6 の割り算：
商 $x+2$
x^2+2x
$2x+6$
$2x+4$
余り 2

$x+3$) x^2+5x+8 の割り算：
商 $x+2$
x^2+3x
$2x+8$
$2x+6$
余り 2

(2) $\dfrac{x+1}{x+2}-\dfrac{x+2}{x+3}-\dfrac{x+3}{x+4}+\dfrac{x+4}{x+5}$

$$=\left(1-\frac{1}{x+2}\right)-\left(1-\frac{1}{x+3}\right)-\left(1-\frac{1}{x+4}\right)+\left(1-\frac{1}{x+5}\right)$$

$$=-\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x+4}-\frac{1}{x+5}$$

$$=\frac{-(x+3)+(x+2)}{(x+2)(x+3)}+\frac{(x+5)-(x+4)}{(x+4)(x+5)}=-\frac{1}{(x+2)(x+3)}+\frac{1}{(x+4)(x+5)}$$

$$=\frac{-(x+4)(x+5)+(x+2)(x+3)}{(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)}=-\frac{4x+14}{(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)}$$

$$=-\frac{2(2x+7)}{(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)}$$

第 1 講　PART3　確認問題 解答

1

[正解] ア：3，イ：2，ウ：7

[解説]

$$\frac{1}{(x-2)(x+1)}+\frac{1}{(x+1)(x+4)}$$

$$+\frac{1}{(x+4)(x+7)}$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+1}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+4}\right) \quad \text{[A]}$$

$$+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x+4}-\frac{1}{x+7}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+7}\right)=\frac{1}{3}\cdot\frac{(x+7)-(x-2)}{(x-2)(x+7)}$$

$$=\mathbf{\frac{3}{(x-2)(x+7)}}$$

[A]　分数式を複数の分数式の和や差の形で表すことを，「部分分数に分解する」という。

$$\frac{1}{(x+a)(x+b)}$$

$$=\frac{1}{b-a}\cdot\frac{(x+b)-(x+a)}{(x+a)(x+b)}$$

$$=\frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{x+a}-\frac{1}{x+b}\right)$$

2

[正解] エオ：21，カ：3，キ：4

[解説]

$$\frac{x^2+2x-12}{x-3}-\frac{x^2+9x+23}{x+4}$$

$$=x+5+\frac{3}{x-3}-\left(x+5+\frac{3}{x+4}\right) \quad \text{[B]}$$

$$=\frac{3}{x-3}-\frac{3}{x+4}$$

$$=3\cdot\frac{(x+4)-(x-3)}{(x-3)(x+4)}$$

$$=\mathbf{\frac{21}{(x-3)(x+4)}}$$

$$\begin{array}{r}
x+5 \\
x-3\,\overline{)\,x^2+2x-12} \\
\underline{x^2-3x} \\
5x-12 \\
\underline{5x-15} \\
3
\end{array}$$

$$\begin{array}{r}
x+5 \\
x+4\,\overline{)\,x^2+9x+23} \\
\underline{x^2+4x} \\
5x+23 \\
\underline{5x+20} \\
3
\end{array}$$

[B]　(分子の次数)≧(分母の次数)である分数式 $\frac{A}{B}$ は，A を B で割った商 Q と余り R を用いて

$$\frac{A}{B}=Q+\frac{R}{B}$$

の形に変形するとよい。

3 **[正解]** ク：8，ケ：1，コ：1，サ：2，シ：2，
ス：3

[解説]

$$-\frac{x+3}{x+1}+\frac{x+4}{x+2}+\frac{x-4}{x-2}-\frac{x-5}{x-3}$$

$$=-\left(1+\frac{2}{x+1}\right)+\left(1+\frac{2}{x+2}\right)$$ [B]

$$+\left(1-\frac{2}{x-2}\right)-\left(1-\frac{2}{x-3}\right)$$

$$=-\frac{2}{x+1}+\frac{2}{x+2}-\frac{2}{x-2}+\frac{2}{x-3}$$

$$=2\cdot\frac{-(x+2)+(x+1)}{(x+1)(x+2)}$$

$$+2\cdot\frac{-(x-3)+(x-2)}{(x-2)(x-3)}$$

$$=2\cdot\frac{-1}{(x+1)(x+2)}+2\cdot\frac{1}{(x-2)(x-3)}$$

$$=2\cdot\frac{-(x-2)(x-3)+(x+1)(x+2)}{(x+1)(x+2)(x-2)(x-3)}$$

$$=2\cdot\frac{-(x^2-5x+6)+(x^2+3x+2)}{(x+1)(x+2)(x-2)(x-3)}$$

$$=2\cdot\frac{8x-4}{(x+1)(x+2)(x-2)(x-3)}$$

$$=\boldsymbol{\frac{8(2x-1)}{(x+1)(x+2)(x-2)(x-3)}}$$